『音樂論壇』 제5집
1991년 12월, 99-110쪽

서양음악 이론사를 위한 원전 연구 (1)

유클리드의 *Division of A Monochord*

金 春 美
(음악학 박사 서울대 음대 강사)

I. 유클리드 (Euclid)

고대 그리이스의 유명한 수학자로 알려진 유클리드에 대한 확실한 기록들은 거의 전해지지 않고 있다. 그의 출생지나 출생연도 등도 알려진 바 없으며, 단지 대략 기원전 365년에서 300년 사이에 살았다고 추측되고 있다. 때문에, 중세 번역가들은 간혹 Megara와 유클리드를 혼동하기도 했는데, 이는, 메가라는 소크라테스 학파였으며, 유클리드가 플라톤 계승자에 의해 교육받았다는 사실에 기인한 것 같다. 그는 Ptolemy I세 (기원전 305-285 사이 통치)하에서, 알렉산드리아에서 선생으로 활약했음이 알려져 있다. 그의 명성은 주로, 기초 수학의 편집인 *ELEMENTS* 에 의한 것인데,[1] 이는 남아있는 희랍의 수학적 저술 중에서 가장 오래된 것이며, 가장 영향력있는 것 중의 하나이다. 19세기 중간 무렵부터 일어난 "유클리드로부터의 탈출" 운동이 일기 전 까지는, 그의 이론이 모든 교과서의 모델이 되었으나, 이 운동은 여러가지 수학 교과서의 출현을 야기시켰으며, 이들은 각기 유클리드의 이론을 여러 형태로 제시함으로 해서, 기하학을 가르치는데 많은 혼돈을 유발시키는 결과를 가져 왔다. *ELEMENTS* 와 유사한 성격의 교과서들이 다른 희랍 작가에 의해 존재하기도 했었고, 또한 비록 Theaetetus와 Eudoxus의 견해를 토대로 삼고 있지만, *ELEMENTS* 의 내용들은 유클리드 고유의 것이며, 그 정리와 증명들 중 많은 것들이 그 자신이 발견한 것이라고 믿어지고 있

1) T.L. Heath의 *The Thirteen Books of Euclid's Elements, with Introduction and Commentary,* 3 vols. (Chicago, 1952).

다. 라틴어로 된 최초의 인쇄본이 1482년 베니스에서 발견되며, 최초의 영역 (英譯)은 1570년 런던에서 발행되었다. 이때부터 여러나라 언어로 발행되기 시작했는데, 성경 다음으로 많이 번역된 책으로 여겨지고 있다. 이것은 모두 13권으로 되어 있다. 1권에서 6권까지는 주로 평범한 기하학에 관계되는 것들이며, 7권에서 9권은 정수의 이론을 담고 있다. 10권은 가장 길고 어려운 것으로, 앞에서 다루었던 비례 이론의 완성과 2차 무리수 연구에 역점을 두고 있다. 11, 12, 13권은 모두 입체기하에 관한 문제를 다루고 있다.

이 외에도 광학, 천문학, 음악, 기계학, 그리고 현상학 등에 관한 많은 논문들을 남겼으나, 이중 약 절반이 유실된 것으로 알려져 있다. *Division of A Monochord*는 그 중 음악에 관한 그의 논문이다.

II. *DIVISION OF A MONOCHORD*

고대 그리이스의 음악이론 중에서, Greater Perfect System은 많은 학자들의 주의를 끌어왔다. 또 이는, 고대 희랍이론의 근본 요지로 간주되고 있다. 그러나, 오늘날에 와서는 고대의 체계적인 공식이나 의미는 그리 명확히 이해되지 못하고 있는데, Greater Perfect System에 대해 가장 선명하고 체계적인 설명이 유클리드의 *Division of A Monochord*라고 할 수 있다.

기원전 300년 경에 쓰여졌으며, 가장 최근의 번역이 1916년 Henricus Menge에 의해 이루어졌다. 그러나 이는 라틴어로 된 것이며, 1787년, Charles Davy에 의해 영어로 옮겨졌으나, 이것은 여러가지 점에서 많은 문제점이 있는 것으로 알려져 있다.

이 논문은, 20개의 명제를 서술한 후, 각기 그것에 따른 증명의 형식으로 되어 있다. 특히 모든 명제들이 마지막 두 명제, 즉 19와 20을 위해 준비되고 있으며, 이 두 개의 항은, Greater Perfect System에 입각하여 단선율을 실제로 분할해 나가는, 즉 모든 nete들을 각기 발견해 나가는 수단을 제시하고 있다.

서장 (序章)에서 논하고 있는 것은 협화음과 불협화음에 관해서이다.

소리가 있다는 것은 움직임, 즉 진동이 있다는 것을 의미하는 것인데, 따라서 진동이란 note의 움직임을 뜻한다고 할 수 있다. 그 움직임에는, 빠른 것도 있으며, 느린 움직임도 있을 것이다. 움직임이 빠를 때 발생하는 소리들은 우리 귀에 높은 음으로 들릴 것이며, 이와반대로 늦은 움직임일 때에는 보다 낮은 소리로 지각될 것이다. 따라서 우리는 하나의 선을 당겼다 늦추었다 함으로 해서 원하는 음들을 만들 수 있다. 이렇게 볼 때, 음이란 각각의 부분들이 모여서 이루어진 조합이라 할 수 있으며, 이렇게 조합된 모든 것들은 각기 수의 비례로 배열할 수 있다. 이 중에는 multiple ratio, super-particular, superpartient ratio 등의 여러 비율이 나올 수 있으며, 이는 바꾸어 말하자면 협화음과 불협화음의 관계로도 말할 수 있다. 즉, multiple이나 super-particular의 비율로 이루어진 것은 협화음이라 하고 있으며, 그 나머지는 불협화음으로 간주하고 있다.

이제 스무 개의 명제들을 하나하나 차례로 살펴보고 그에 따른 증명을 하기로 해보자.[2)]

III. Division of A Monochord의 20 명제

1) Multiple interval이 더블되어 어떤 음정을 만들면, 그 음정 역시 Multiple이 된다.

C	B	D
6	12	24

B는 C의 Multiple이며, D는 더블된 음정이므로 다음과 같은 비례식이 성립한다.
즉, C:B = B:D
그런데 B:C는 2:1이고, B:D 역시 2:1 이므로, C:D는 1:4가 된다. 그런데, B는 C의 Multiple로서, C로 나누어지며, 이는 B와 D도 마찬가지 관계이다.
따라서, D역시 C로 나누어 지며, C의 Multiple이 된다.

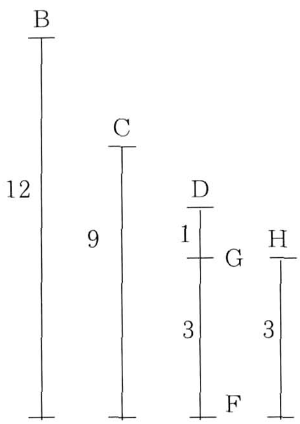
2) *Division of A Monochord*의 원문은 Thomas J. Mathiesen이 쓴 *Bibliography of Sources for the Study of Ancient Greek Music* (Hackensack, New York: Boonin, 1974)의 번역을 바탕으로 함.

2) 어떤 더블된 음정이 Multiplewhole이 된다면, 그 음정 역시 Multiple이다.

C	B	D
6	12	24

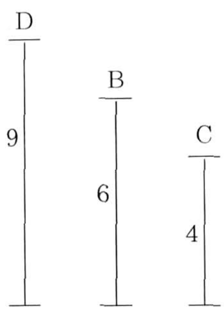
D는 C의 Multiple 이다. 따라서 더블되기 전의 음정인 B 역시 C의 Multiple이 된다. C는 D를 measure하며, 또한 C는 B를 measure한다. 따라서, B는 C의 Multiple이다.

3) super-particular interval에서는, 그 중간에 맞는 비율이 없다.



B, C와 DF, H를 각기 4:3이 되게 한다. DF와 H는 가장 작은 수를 택한다. H와 같도록 DG를 뺀다. DF는 H의 super-particular이며, DG는 DF와 H의 공통 measure가 된다. 따라서 DG는 monad가 되므로, DF와 H사이에는 어떤 평균치도 없다. 왜냐하면 DF와 H사이에 들어 갈 수 있는 것은 DF보다도 작고 H보다는 커야 하기 때문이다. B와 C의 관계도 같은 방법으로 증명될 수 있다.

4) non-multiple interval이 더블되면, 전체음정 역시 non-multiple이거나 non-superparticular이다.

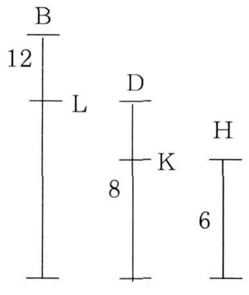


* D를 C의 Multiple로 가정해 보자.
  그렇다면, 명제 2에 의해, B가 C의 Multiple이 되어야 하는데, B가 C의 Multiple이 아니라는 것을 전제에서 이미 규정하고 있다. 따라서 D는 C의 Multiple이 될 수 없다.
* 또한 super-particular도 될 수 없다. 즉 super-particular사이에는 어떤 것도 그 사이에 들어 갈 수 없는데, D와 C사이에는 B가 있기 때문이다.

5) 어떤 음정이 더블되어 Multiple whole이 되지 않는다면, 그 음정 역시 Multiple 관계에 있지 않다.
만약 B가 C의 Multiple이라면, 더블된 음정인 D역시 C의 Multiple이어야 한다. 그러나, 전제에서 Multiple whole이 이루어지지 않는다고 하였으므로, 이 가정은 성립될 수가 없다. 따라서 B는 C의 Multiple이 아니다.

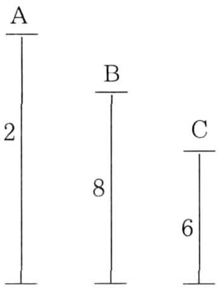
6) duple interval은 두 개의 가장 큰 super-particular interval로 이루어 진다. (즉, 3:2 관계의 sesquialtera와 4:3 관계의 sesquitertia이다.)
여기에서는 두 가지의 증명방법을 제시하고 있는데, Davy는 두 번째의 방법을 자신의 번역서에서는 생략하고 있다.

①의 방법



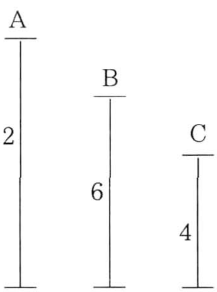
* BC와 DF는 3:2이고, DF와 H는 4:3이다.
* H와 같이 하기 위해 K를 설정한다.
* DF와 같이 하기 위해 L을 설정한다.
* 그런데 BC는 DF와 3:2 이므로,
BL = 1/3 BC = 1/2 DF
*DF는 H와 4:3 이므로,
DK = 1/3 H = 1/4 DF
* 여기에서,
DK = 1/4 DF 따라서 DK = 1/2 BL
BL = 1/2 DF
* 그런데, BL = 1/3 BC 이므로
DK = 1/6 BC
= 1/3 H
* 따라서, BC = 2H
그러므로, BC는 H의 duple이다.

②의 방법



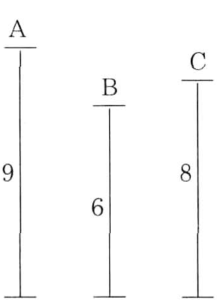
* A:B = 3:2 따라서,
  A = B + 1/2 B 이므로, 2A = 3B
* B:C = 4:3 따라서,
  B = C + 1/3 C 이므로, 3B = 4C
* 그러므로 2A = 4C
  따라서 A는 C의 Duple Interval이다.

7) duple interval과 sesquialtera의 관계에서는 triple interval이 생긴다.



* A가 B의 Duple 이므로, A = 2B
* B:C = 3:2 이므로,
  B = C + 1/2C 따라서, 2B = 3C
  따라서, A = 3C
  그러므로 A는 C의 triple interval이 된다.

8) sesquialtera 관계의 음정에서, sesquitertia 음정을 뺀다면, 그 나머지는 9:8의 sesquioctaval interval이 된다.



* A:B = 2:3 이므로, A = 3/2B 이다.
  따라서, 8A = 12B
* C:B = 4:3 이므로, C = 4/3B 이다.
  따라서, 9C = 12B
* 그러므로 8A = 9C
  A = C + 1/8C
  따라서, A는 C의 sesquioctaval interval 이다.

9) 6개의 sesquioctaval interval은 duple interval보다 크다.

$A = 1$ 이면

$B = 9/8\ A$

$C = 9/8\ B = 9/8 \times 9/8\ A$

$D = 9/8\ C = 9/8 \times 9^2/8^2\ A$

$E = 9/8\ D = 9/8 \times 9^3/8^3\ A$

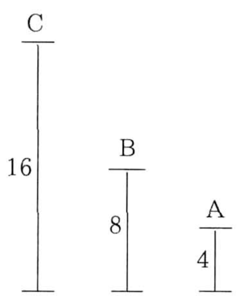
$F = 9/8\ E = 9/8 \times 9^4/8^4\ A$

$G = 9/8\ F = 9/8 \times 9^5/8^5\ A$

$= 9^6/8^6\ A$

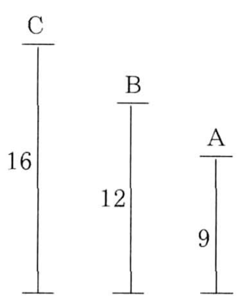
유클리드는 A를 262,144로 정했다.
앞의 식 A에 262,144를 대입하면, G는 531,441이 된다.
그런데, 2A = 524,288이므로,
따라서 G는 2A보다 크다.

10) 옥타브 음정은 multiple interval이다.



* A : nete of hyperbolaion
  B : mese
  C : proslambanomenos
  interval AC = double octave
* 따라서 이것이 super-particular인지, multiple인지를 결정해야 한다.
  그런데 A와 B는 서로 합쳐져도 multiple이 되기 때문에, 명제 2에 의해 AB는 multiple interval이 된다.

11) 4도와 5도는 super-particular로 되어 있다.



* A : nete of synemmenon
  B : mese
  C : hypate of the meson
* AC의 명제 4에 의해, multiple이 될 수 없다. 그런데, AB : BC는 그 비율이 같으므로, 명제 5에의해, 합쳐져도 multiple이 될 수 없다. 그러나 AC는 consonant 이므로, super-particular이다. (5도도 같다)

12) 옥타브 음정은 duple이다.

명제 10에서 옥타브가 multiple이라는 것을 증명하였다. 따라서 옥타브는 duple이거나, 그보다 크거나이다. 그러나, 명제 6에서 duple은 두 개의 가장 큰 super-particular로만 구성될 수 없으므로, 옥타브는, 4도와 5도의 두 개의 협화음으로 이루어지는 duple 음정이다.

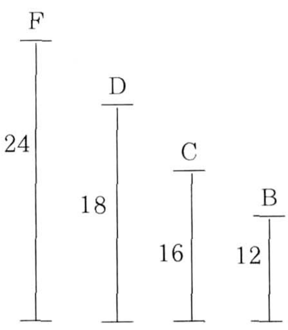
13) wholetone interval은 sesquioctaval이다.

명제 8에서, sesquialteran interval에서 sesquitertian interval을 빼면 sesquioctaval이 됨을 증명하였다.
따라서, wholetone interval 이란 5도에서 4도를 뺀 나머지 것을 말한다.

14) Octave는 6개의 tone보다 작다.

명제 12에서 octave는 duple임이 증명되었다.
그런데, 또 명제 9에서, 6개의 sesquioctaval 은 duple 보다 크다고 하였다.
그러므로, Octave는 6개의 tone보다 작다.

15) 4도는 2와 1/2 tone 보다 작으며, 5도는 3과 1/2 tone보다 작다.



* B : nete diezeugmenon C : paramese
D : mese F : hypate meson
CD = a tone (1 1/8), BF = octave
(명 제 14에 의해 6 tone보다 작다)
B:C = D:F (5개 tone보다 작다)
따라서 BC는 2 1/2 tone보다 작다 :4도
BD는 3 1/2 tone보다 작다 :5도

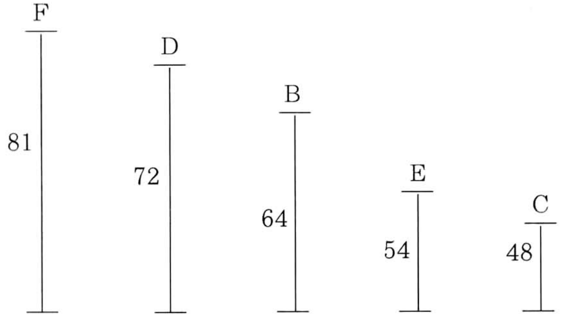
16) 하나의 tone은 똑같은 음정이나, 또는 더 큰 음정으로 나누어질 수 없다.

명제 13에서, tone이란 super-particular라고 밝혔다. 그런데, super-particular에서는 어떤 평균치의 수도 비례상으로 맞지 않는다는 것 역시 명제 3에서 증명되었다. 따라서 tone은 나누어질 수 없는 것이다.

17) paranetai와 lichanoe는 다음과 같은 협화음을 통해서 발견되어진다.

B를 Mese로 정한 후, C에 대해 4도가 되도록 한다. C는 D에 대해 5도가 되도록 한다. 따라서 BD는 하나의 tone이 된다.
D에서 E까지 4도가 되도록 한다. 또한 E에서 F까지 5도가 되도록 한다. FD 역시 하나의 tone이 된다.
그러므로, FB는 diatone가 되며, 따라서 F가 lichanos인 것이 밝혀지며, paranetai 역시 같은 방법으로 찾을 수 있다.

18) Parthypatai와 tritai는 pycnon을 같은 음정들로 나눌 수 없다.



Mese를 B라하고, lichanos를 C, hypate를 D라고 한다. B에서 F까지 5도가 되게 한다. 따라서, FD는 한 tone이 된다. 그리고, F에서 E가 4도가 되게 한다. 그러므로 interval FD는 한 tone이 되며, 이는 CE의 경우에도 마찬가지가 된다. 여기에 common interval인 DC를 더해 보자. 따라서 FC는 DE와 동등하다. 그러므로 어

떤 평균치도 FE와 비율상 맞지 않는다. 왜냐하면, 명제 3에서 증명한 바와 같이 super-particular 이기 때문이다. 마찬가지로 DF는 CE와 동등하다. 따라서 hypate로부터 lichanos에 이르는 DC에는 아무런 것도 맞지 않는다. 따라서, parhypate는 pycnon을 동등한 음정들로 나눌 수 없으며, trite 역시 마찬가지이다.

19) Immutable System에 의해 단선율을 분류하기로 한다.

A	proslambanomenos
L	hypate hypaton
C	lichanos hypaton
H	hypate meson
D	mese
K	paramese
F	nete synemmenon
G	nete diezeugmenon
E	nete hyperbolaion
B	

* AB 를 C. D. E 로 4등분 한다.
  AB:CD = 4:3 (sesquitertia)
  따라서, consonant.
* AB = 2 BD 따라서,
  Octave consonant.
  BD -- mese
* AB = 4 EB
  EB -- nete hyperbolaion
* CB를 F로 2등분 한다.
  CE = 2 FB 따라서,
  CB는 FB의 octave consonant.
  FB -- nete synemmenon.
* DB를 G로 3등분 한다.
  DB = 3 DG
  DB:GB = 3:2 따라서,
  DB 는 GB 의 5도 consonant.
  DG -- nete diezeugmenon.
* GH = GB가 되도록 H를 정한다.
  HB는 GB의 Octave consonant.
  HB -- hypate meson.
* HB의 1/3이 되도록 K를 정한다. 따라서,
  HB:KB = 3:2.
  KB -- paramese.
* KB와 같은 크기의 L을 찾는다.
  LK = KB.
  LK -- hypate hypaton.

이런 방법으로, immutable system의 모든 nete들을 monochord에서 찾을 수 있다.

20) Movale note들을 고려해 본다.[3]

A	proslambanomenos	A
L	hypate hypaton	B
P	parhypate hypaton	c
C	lichanos hypaton	d
H	hypate meson	e
O	parhypate meson	f
R	lichanos meson	g
D	mese	a
K	paramese	b
J	trite diezeugmenon	c′
F	paranete diezeugmenon	d′
G	nete hyperbolaion	e′
N	trite hyperbolaion	f′
M	paranete hyperbolaion	g′
E	nete hyperbolaion	a′
B		

* EB를 8등분하여 M을 구한다.
EM = 1/8 EB 따라서,
MB는 EB의 sesquioctave.

* MB 를 8등분하여 N을 구한다.
NM = 1/8 MB.
따라서, 음정에 있어서 NB는 BM보다 낮고, NB는 BE보다 낮다.
NB -- trite hyperbolaion.
MB -- paranete hyperbolaion, 또는 diatonic hyperbolaion

* NB의 1/3과 같은 크기로 J를 결정한다.
JB = 1 1/3 NB 따라서, 4도 consonant.
JB -- trite diezeugmenon.

* JB의 1/2 되는 지점에 O를 결정. (2:3의 관계)
따라서, OB는 JB의 5도 consonant.
OB -- parhypate meson.

* JO = OP가 되도록 P를 결정한다.
PB -- parhypate hypaton.

* BC의 1/4 지점에 R을 결정한다.
CR -- diatonic meson, 또는 lichanos meson.

3) Proslambaromenos 이하는 그리이스 시대 부르던 음의 명칭이며, 우측의 알파벳은 오늘날의 음률과 맞추어 본 것이다. Aristoxenus는 이렇게 분류된 음들을 4개의 tetrachord로 나누었다. 즉, 분류기호 L-H: Tetrachord Diezeugmenon, G-E: Tetrachord Hyperbolaion이라 하였다.

Ⅳ. 결론

이 논문이 목적하고 있는 바는 Greater Perfect System에 있어서, 각 음정들 간의 비례적인 기초를 설정하는 것이다. 그러므로 각 음들의 순서와 기능에 대한 것들은 그 이전부터 사용되던 것들을 그대로 따랐음을 추측할 수 있다. 또 한가지 이 논문이 가지는 의의는, 유클리드는 이 논문으로, 피타고라스학파와 아리스토세누스학파, 즉 수학적 학파와 경험적 학파와의 조화를 이루려고 시도한 것으로 큰 의미가 있는 것이다.